МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.Г. РЯБЕНКОВ

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ОСНОВАМ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Справочное учебное пособие
по курсу
Теоретическая механика

Казань 2006

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.Г. РЯБЕНКОВ

Утверждено
учебным управлением КГЭУ
в качестве учебного пособия
для студентов

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ОСНОВАМ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Справочное учебное пособие
по курсу
Теоретическая механика

Казань 2006

УДК 531
ББК 22.21
Р 91

Рябенков Н.Г.

Краткие сведения по основам теоретической механики: Учеб. пособие. Казань: Казан. гос. энерг. ун-т, 2006. 32 с.

Представлены справочные сведения по разделам курса теоретической механики, входящим в большинство образовательных стандартов энергетических и машиностроительных специальностей вузов.

Предназначено для подготовки к экзаменам студентов очной и заочной форм обучения.

Рецензенты
Канд.физ.-мат. наук, доц. КГУ Ф.Х.Тазюков
Канд.физ.-мат. наук, доц. КГЭУ Н.Д.Черепенин

Рекомендовано секцией РИС
факультета энергомашиностроения
Председатель секции С.Р. Сидоренко.

© Рябенков Н.Г., 2006
© Казанский государственный энергетический университет, 2006

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

1. СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ

1. **Вектор** есть направленный отрезок. Произвольные вектора обозначим $\overline{Э}, \overline{Ю}, \overline{Я}$. Всякая формула, записанная с помощью этих векторов, справедлива для любого вектора. На рисунках вектор изображается в виде стрелки.

2. Модуль вектора $\overline{Ю}$ есть длина стрелки, обозначается $\left|\overline{Ю}\right|$ или $Ю$.

3. Проекция вектора $\overline{Ю}$ **на ось** ox есть взятая с соответствующим знаком длина отрезка, заключенного между проекцией начала и конца вектора. Обозначается $Ю_x$ (рис. 1). Если вектор расположен в пространстве с тремя осями координат ox, oy, oz, то проекции на эти оси обозначаются $Ю_x, Ю_y, Ю_z$.

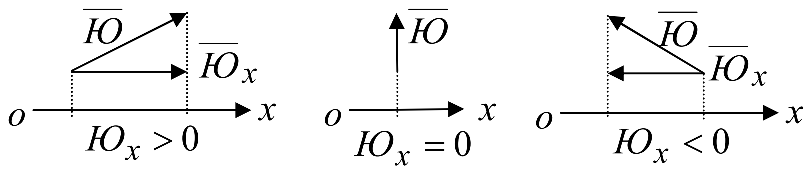

Рис.1

Модуль вектора через его проекции выражается формулой

$$Ю = \sqrt{Ю_x^2 + Ю_y^2 + Ю_z^2}.$$

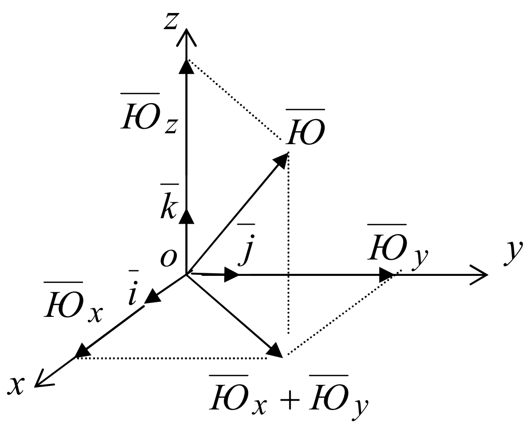

Рис. 2

4. Единичный вектор оси (орт) есть вектор, направленный вдоль оси и по модулю равный единице. Орты декартовой системы координат $oxyz$ обозначаются $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

5. Составляющей вектора $\overline{Ю}$ вдоль оси ox называется вектор $\overline{Ю}_x = Ю_x \bar{i}$ (рис. 1). Вектор $\overline{Ю}_x$ параллелен или антипараллелен оси ox. Составляющие вдоль осей oy, oz обозначаются $\overline{Ю}_y, \overline{Ю}_z$ (рис. 2). Любой вектор можно представить в виде

$$\overline{Ю} = \overline{Ю}_x + \overline{Ю}_y + \overline{Ю}_z = Ю_x \bar{i} + Ю_y \bar{j} + Ю_z \bar{k}.$$

2. ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

1. **Умножение вектора на скаляр**. В результате умножения вектора $\overline{Ю}$ на скаляр f получим вектор $\overline{Э} = f\overline{Ю}$, параллельный (при $f > 0$) или антипараллельный (при $f < 0$) вектору $\overline{Ю}$. Проекции вектора $\overline{Э}$ вычисляются по формулам

$$Э_x = fЮ_x,\ Э_y = fЮ_y,\ Э_z = fЮ_z.$$

2. Сложение векторов. Два вектора складываются по правилу параллелограмма или по правилу треугольника (рис. 3). Проекция суммы равна сумме проекций:

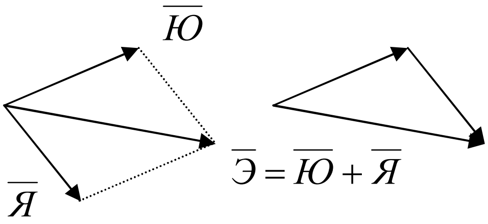

Рис. 3

$$Э_x = Ю_x + Я_x,$$
$$Э_y = Ю_y + Я_y,$$
$$Э_z = Ю_z + Я_z.$$

Вычитание векторов определяется правилом сложения

$$\overline{Э} = \overline{Ю} - \overline{Я} = \overline{Ю} + (-\overline{Я}).$$

3. Скалярное произведение двух векторов. В результате скалярного умножения двух векторов получается скаляр $Э = \overline{Ю} \cdot \overline{Я}$, определяемый двумя способами:

а) $Э = Ю_x Я_x + Ю_y Я_y + Ю_z Я_z$. б) $Э = ЮЯ \cos\alpha$.

Здесь α – угол между векторами $\overline{Ю}$ и $\overline{Я}$.

4. Векторное произведение двух векторов. В результате векторного умножения двух векторов получается вектор $\overline{Э} = \overline{Ю} \times \overline{Я}$, определяемый двумя способами – аналитическим и геометрическим.

При аналитическом способе вектор $\overline{Э}$ находится по проекциям на оси координат согласно формулам:

$$Э_x = Ю_y Я_z - Ю_z Я_y,\quad Э_y = Ю_z Я_x - Ю_x Я_z,\quad Э_z = Ю_x Я_y - Ю_y Я_x.$$

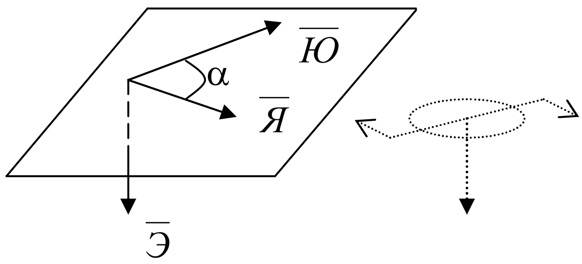

Рис. 4

При геометрическом способе вектор $\overline{Э}$ строится перпендикулярно плоскости, проведенной через сомножители $\overline{Ю}$ и $\overline{Я}$ в соответствии с правилом правого винта (рис. 4). Его модуль вычисляется по формуле

$$Э = ЮЯ \sin\alpha.$$

Здесь α – угол между векторами $\overline{Ю}$ и $\overline{Я}$.

Правило правого винта. Вначале отложим сомножители из одной точки. Далее совместим плоскость головки винта с плоскостью векторов $\overline{Ю}$ и $\overline{Я}$, и правой рукой будем завинчивать винт с правой резьбой по кратчайшему расстоянию от первого сомножителя ко второму. Направление завинчивания совпадает с направлением вектора $\overline{Э}$.

5. Переменный вектор. Если записано $\overline{Ю} = \overline{Ю}(t)$, то это означает, что с изменением параметра t меняется или модуль, или направление вектора $\overline{Ю}$, или - и то и другое. В общем случае $Ю = Ю(t)$, $Ю_x = Ю_x(t)$, $Ю_y = Ю_y(t)$, $Ю_z = Ю_z(t)$.

6. Годограф. Годографом вектора $\overline{Ю}(t)$ называется линия, которую вычертит конец вектора при плавном изменении t, если вектор откладывать из неподвижного начала отсчета.

7. Производная от вектора. Пусть $\Delta\overline{Ю} = \overline{Ю}(t) - \overline{Ю}(t_0)$ есть приращение вектора $\overline{Ю}$ при изменении аргумента на величину $\Delta t = t - t_0$.

Вектор производной обозначается $\dfrac{d\overline{Ю}}{dt}$ и определяется соотношением

$$\frac{d\overline{Ю}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{Ю}}{\Delta t}.$$

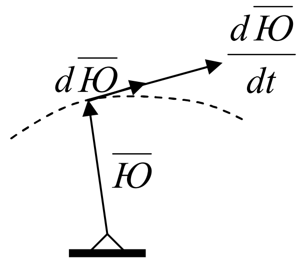

Рис.5

Вектор $\dfrac{d\overline{Ю}}{dt}$ направлен по касательной к годографу вектора $\overline{Ю}$ (рис. 5) и вычисляется согласно формуле [1]

$$\frac{d\overline{Ю}}{dt} = \frac{dЮ_x}{dt}\bar{i} + \frac{dЮ_y}{dt}\bar{j} + \frac{dЮ_z}{dt}\bar{k}.$$

8. Дифференциал вектора. Дифференциалом вектора $\overline{Ю}$ называется вектор

$$d\overline{Ю} = \frac{d\overline{Ю}}{dt}dt.$$

Вектор $d\overline{Ю}$ направлен по касательной к годографу вектора $\overline{Ю}$. Если dt - бесконечно малая величина, то $d\overline{Ю}$ - бесконечно малый вектор. При этом выполняется равенство $\dfrac{d\overline{Ю}}{dt} = d\overline{Ю}/dt$, т.е. выражение $\dfrac{d\overline{Ю}}{dt}$ можно понимать как обозначение производной и как отношение дифференциалов.

9. Неопределенный интеграл вектора. Неопределенным интегралом вектора $\overline{Ю}$ называется вектор, который обозначается $\int \overline{Ю}dt$ и вычисляется по формуле

$$\int \overline{Ю}dt = \bar{i}\int Ю_x dt + \bar{j}\int Ю_y dt + \bar{k}\int Ю_z dt + \overline{C}.$$

Интеграл вычисляется с точностью до постоянного слагаемого $\overline{C}$.

[1] Система координат здесь считается неподвижной.

10. Определенный интеграл вектора. Определенным интегралом вектора $\overline{Ю}(t)$ в пределах изменения t от t_0 до t_1 называется вектор, который обозначается $\int_{t_0}^{t_1} \overline{Ю} dt$ и вычисляется по формуле

$$\int_{t_0}^{t_1} \overline{Ю} dt = \bar{i} \int_{t_0}^{t_1} Ю_x dt + \bar{j} \int_{t_0}^{t_1} Ю_y dt + \bar{k} \int_{t_0}^{t_1} Ю_z dt.$$

КИНЕМАТИКА

3. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Закон движения точки. Законом движения точки называется соотношение (или система соотношений), позволяющее в любой момент времени определить положение точки в пространстве.

1. Векторный способ задания закона движения точки

Радиус-вектором точки b называется вектор $\bar{r}$**,** исходящий из начала отсчета “о”, конец которого находится в точке b (рис. 6).

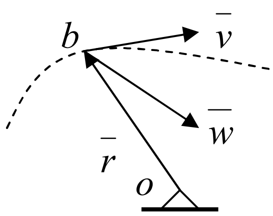

Рис. 6

Закон движения определяется соотношением

$$\bar{r} = \bar{r}(t).$$

Траектория точки b есть годограф радиус-вектора.

Скорость точки есть вектор

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории.

Ускорение точки есть вектор

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}.$$

Вектор ускорения не может быть направлен в сторону выпуклости траектории. При движении по прямой вектор $\bar{w}$ направлен вдоль этой прямой.

2. Координатный способ задания закона движения точки

Закон движения определяется соотношениями:

$$x_b = x(t), \; y_b = y(t), \; z_b = z(t).$$

Здесь $x(t), y(t), z(t)$ – координаты движущейся точки b. Для определения **уравнения траектории** в явном виде надо из закона движения исключить время t.

Скорость и ускорение точки вычисляются по проекциям на оси координат (рис. 7):

$$\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}, \; \bar{w} = w_x \bar{i} + w_y \bar{j} + w_z \bar{k},$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}, v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

$$w_x = \frac{dv_x}{dt}, w_y = \frac{dv_y}{dt}, w_z = \frac{dv_z}{dt},$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}.$$

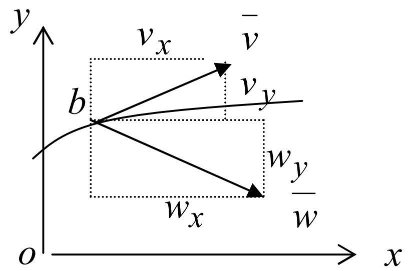

Рис.7

3. Естественный способ задания закона движения точки

Траектория считается известной.

Закон движения определяется заданием длины дуги, отсекаемой точкой b на траектории, в зависимости от времени, т.е.

$$s = s(t).$$

Естественная система координат. Начало отсчета системы помещается в движущуюся точку b. Оси координат направлены по касательной (в сторону положительных s), по главной нормали (в сторону вогнутости траектории) и по бинормали к траектории. Единичные векторы этих осей обозначаются $\bar{\text{ф}}\, \bar{n}, \bar{\text{в}}$.

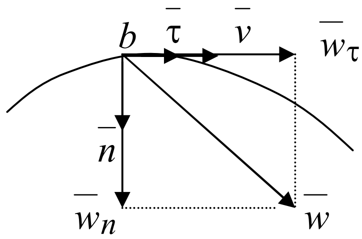

Рис.8

Скорость и ускорение точки определяются по проекциям на оси естественной системы координат согласно формулам

$$\bar{v} = v_{\text{ф}} \bar{\text{ф}}\; v = |v_{\text{ф}}|, \quad \bar{w} = \bar{w}_{\text{ф}} + \bar{w}_n, \; \bar{w}_{\text{ф}} = w_{\text{ф}} \bar{\text{ф}}\; \bar{w}_n = w_n \bar{n}, \; w = \sqrt{w_{\text{ф}}^2 + w_n^2}.$$

Здесь $\bar{w}_{\text{ф}}, \bar{w}_n$ – касательное и нормальное ускорения (рис. 8);

$$v_{\text{ф}} = \frac{ds}{dt}, \; v_n = 0, \; v_{\text{в}} = 0$$

- проекции вектора скорости на касательную к траектории, на нормаль и бинормаль;

$$w_{\text{ф}} = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}, \; w_n = \frac{v_{\text{ф}}^2}{\text{с}} = \frac{v^2}{\text{с}}, \; w_{\text{в}} = 0$$

- проекции вектора ускорения, ρ – радиус кривизны траектории.

4. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

В кинематике рассматривается движение абсолютно твердых тел (деформацией тел пренебрегаем).

1. Поступательное движение

Движение тела называется поступательным, если любая прямая, проведенная в теле, движется параллельно самой себе. При поступательном движении **все точки тела имеют наложимые траектории, одинаковые скорости и ускорения**.

Уравнение движения определяется заданием координат любой точки тела

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t).$$

2. Вращение вокруг неподвижной оси

Ось вращения совмещается с осью oz, орт оси $\overline{k}$ (рис. 9).

Уравнение вращения задается соотношением

$$\varphi = \varphi(t).$$

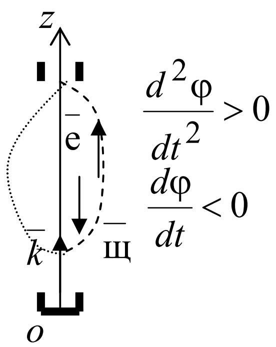

Рис.9

Здесь φ – угол поворота тела. Он считается положительным, если тело повернулось против хода часовой стрелки (при взгляде с положительного направления оси oz).

Вектором угловой скорости тела называется вектор

$$\overline{щ} = \frac{d\varphi}{dt}\overline{k}.$$

Вектор угловой скорости параллелен оси вращения. Его модуль определяется формулой

$$щ = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right|.$$

Угловой скоростью в скалярном смысле называется проекция вектора $\overline{щ}$ на ось oz

$$щ_z = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Вектором углового ускорения тела называется вектор

$$\overline{е} = \frac{d\overline{щ}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\overline{k}.$$

Вектор углового ускорения параллелен оси вращения. Его модуль определяется формулой

$$е = \left|\frac{dщ_z}{dt}\right|.$$

Угловым ускорением в скалярном смысле называется проекция вектора $\overline{е}$ на ось oz

$$е_z = \frac{d щ_z}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

Вращение называется **равномерным**, если $щ_z = \mathrm{const}$. **Уравнение равномерного вращения** имеет вид

$$\varphi(t) = щ_z t + \varphi_0.$$

Здесь φ_0 − начальный угол поворота.

Вращение называется **равнопеременным**, если $е_z = \mathrm{const}$. **Уравнение равнопеременого вращения** имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} е_z t^2 + щ_{z0} t + \varphi_0.$$

Здесь $щ_{z0}$ − начальная угловая скорость; φ_0 − начальный угол поворота.

Траектория произвольной точки b, принадлежащей телу, есть окружность радиуса R (рис. 10, вид сверху). R - расстояние от точки b до оси вращения.

Скорость и ускорение точки b определяется по формулам

$$\overline{v} = \overline{щ} \times \overline{r},\ \overline{w} = \overline{w}_ф + \overline{w}_n,\ \overline{w}_ф = \overline{е} \times \overline{r},\ \overline{w}_n = \overline{щ} \times \overline{v}.$$

Здесь $\overline{r}$ − радиус-вектор точки b.

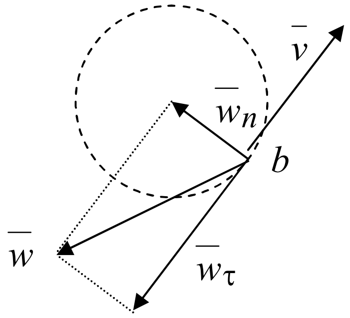

Рис.10

Проекции векторов скорости и ускорения на оси естественной системы координат определяются соотношениями

$$v_ф = щ_z R,\ w_ф = \varepsilon_z R,\ w_n = \omega^2 R.$$

Модули этих векторов вычисляются по формулам

$$v = щR,\ w = R\sqrt{е^2 + щ^4}.$$

3. Плоское движение

От исследования движения тела переходим к исследованию движения его проекции на неподвижную плоскость oxy, которая называется **плоской фигурой**.

Полюс – произвольно выбранная точка плоской фигуры. Далее обозначается b_1.

Движение плоской фигуры складывается из поступательного движения вместе с полюсом и вращения вокруг полюса.

Уравнения движения плоской фигуры:

$$x_1 = x_1(t), y_1 = y_1(t), \varphi = \varphi(t).$$

Здесь x_1, y_1 − координаты полюса b_1; φ − угол поворота плоской фигуры.

Скорость произвольной точки b_2 плоской фигуры складывается из скорости полюса $\bar{v}_1$ и скорости $\bar{v}_{21}$, которую точка b_2 имеет во вращении вокруг полюса b_1(рис.11):

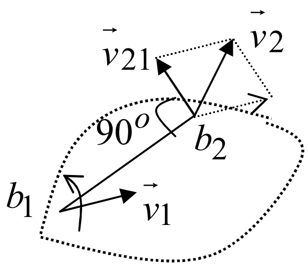

Рис.11

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_1 + \bar{v}_{21},\ \ \bar{v}_{21} = \bar{\text{щ}} \times \bar{\Re},\ \ v_{21} = \text{щ}\Re,\ \ \bar{\Re} = \overline{b_1 b_2}.$$

Здесь $\bar{\text{щ}} = \dfrac{d\varphi}{dt}\bar{k}$ – вектор угловой скорости плоской фигуры.

Проекции скоростей двух точек плоской фигуры на направление отрезка, соединяющего эти точки, равны между собой.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) плоской фигуры называется точка, скорость которой в данное мгновение времени равна нулю. Далее МЦС обозначаем p. При исследовании скоростей движение плоской фигуры в каждое мгновение можно рассматривать как вращение вокруг мгновенного центра скоростей (рис.12).

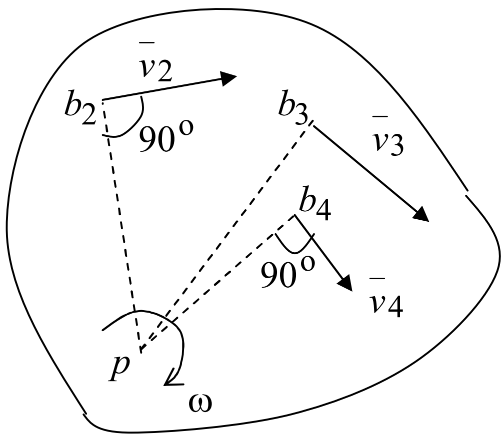

Рис.12

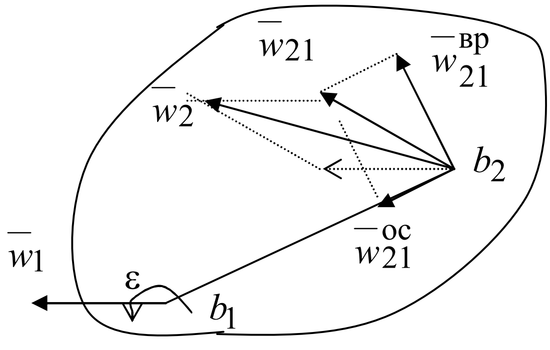

Рис.13

Ускорение произвольной точки b_2 плоской фигуры складывается из ускорения полюса $\bar{w}_1$ и ускорения $\bar{w}_{21}$, которое точка b_2 имеет во вращении вокруг полюса b_1 (рис.13):

$$\bar{w}_2 = \bar{w}_1 + \bar{w}_{21},\ \ \bar{w}_{21} = \bar{w}_{21}^{\text{вр}} + \bar{w}_{21}^{\text{ос}},\ \ \bar{w}_{21}^{вр} = \bar{\text{е}} \times \bar{\Re}\ \ (\bar{\Re} = \overline{b_1 b_2}),\ \ \bar{w}_{21}^{\text{ос}} = \bar{\text{щ}} \times \bar{v}_{21},$$

$$w_{21}^{\text{вр}} = \text{е}\Re,\ \ w_{21}^{\text{ос}} = \text{щ}^2\Re.$$

Здесь $\bar{\text{е}} = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}\bar{k}$ – вектор углового ускорения плоской фигуры.

Мгновенным центром ускорений плоской фигуры называется точка, ускорение которой равно нулю.

4. Движение твердого тела с одной неподвижной точкой (сферическое движение)

Вводится подвижная система координат oозж с центром в неподвижной точке “o ”, жестко связанная с телом (рис. 14). Положение тела в любой момент времени определяется углами Эйлера $φ, ш, и$ [2].

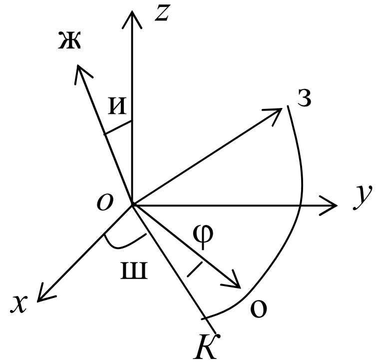

Рис.14

Уравнения движения тела имеют вид

$$φ = φ(t), ш = ш(t), и = и(t).$$

Векторы угловой скорости и углового ускорения тела определяются проекциями на оси координат согласно формулам

$$щ_x = \sin и \cdot \sin ш \cdot \frac{dφ}{d\mathrm{t}} + \cos ш \cdot \frac{dи}{d\mathrm{t}},\ щ_y = \sin ш \cdot \frac{dи}{dt} - \sin и \cdot \cos ш \cdot \frac{dφ}{dt},\ щ_z = \cos и \cdot \frac{dφ}{dt} + \frac{dш}{dt},$$

$$е_x = \frac{dщ_x}{dt},\ е_y = \frac{dщ_y}{dt},\ е_z = \frac{dщ_z}{dt}.$$

Мгновенная ось вращения – прямая, точки которой имеют скорость равную нулю. Она проходит через неподвижную точку “o” параллельно вектору угловой скорости $\bar{щ}$ и имеет уравнение

$$\frac{x}{щ_x} = \frac{y}{щ_y} = \frac{z}{щ_z}.$$

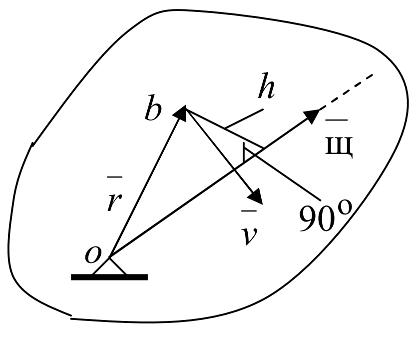

Рис.15

Траектория произвольной точки b тела лежит на поверхности сферы радиуса r.

Скорость произвольной точки b тела определяется соотношениями

$$\bar{v} = \bar{щ} \times \bar{r},\ v = щh.$$

Здесь $h -$ расстояние от точки b до мгновенной оси вращения (рис.15).

Ускорение произвольной точки b тела складывается из вращательного и осестремительного ускорений и определяется формулами

$$\bar{w} = \bar{w}^{\text{вр}} + \bar{w}^{\text{ос}},\ \bar{w}^{\text{вр}} = \bar{е} \times \bar{r},\ \bar{w}^{\text{ос}} = \bar{щ} \times \bar{v}.$$

5. Свободное движение твердого тела

Свободное (произвольное) движение твердого тела складывается из поступательного движения вместе с полюсом и вращения вокруг полюса. Полюс – любая точка тела, которая далее обозначается b_1.

---

[2] На рис. 14 движущееся тело не изображено.

Скорость произвольной точки b_2 складывается из скорости $\bar{v}_1$, которую точка имеет в поступательном движении вместе с полюсом b_1, и скорости $\bar{v}_{21}$, которую точка b_2 имеет во вращении вокруг полюса:

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_1 + \bar{v}_{21},\ \ \bar{v}_{21} = \bar{щ} \times \bar{\Re} \quad (\bar{\Re} = \overline{b_1 b_2}),\quad v_{21} = щh.$$

Здесь $h -$ расстояние от точки b_2 до мгновенной оси вращения, $\bar{щ} -$ вектор угловой скорости тела.

Проекции скоростей двух точек тела на направление отрезка, соединяющего эти точки, равны между собой.

Ускорение произвольной точки b_2 складывается из ускорения полюса $\bar{w}_1$ и ускорения $\bar{w}_{21}$, которое точка b_2 имеет во вращении вокруг полюса b_1:

$$\bar{w}_2 = \bar{w}_1 + \bar{w}_{21},\ \ \bar{w}_{21} = \bar{w}_{21}^{\text{вр}} + \bar{w}_{21}^{\text{ос}},\ \ \bar{w}_{21}^{\text{вр}} = \bar{е} \times \bar{\Re}\ \ (\bar{\Re} = \overline{b_1 b_2}),\ \ \bar{w}_{21}^{\text{ос}} = \bar{щ} \times \bar{v}_{21}.$$

Векторы угловой скорости $\bar{щ}$ и углового ускорения $\bar{е}$ определяются углами Эйлера (см. п. 4.**4**).

5. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ

1. Сложное движение точки

Вводится неподвижная система отсчета $oxyz$ и подвижная система Aозж (рис.16). Движение точки b относительно неподвижной системы отсчета $oxyz$ называется **абсолютным движением**. Движение точки b относительно подвижной системы Aозж называется **относительным движением.** Движение точки b вместе с подвижной системой отсчета Aозж называется **переносным движением**.

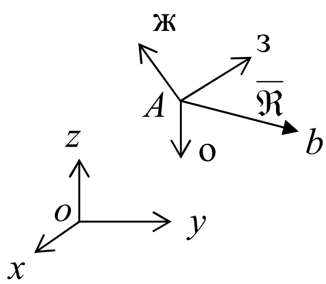

Рис.16

Скорость точки b вычисляется по формуле

$$\bar{v}_{\text{абс}} = \bar{v}_{\text{пер}} + \bar{v}_{\text{отн}}.$$

Здесь $\bar{v}_{\text{абс}} -$ скорость точки в абсолютном движении,

$$\bar{v}_{\text{пер}} = \bar{v}_A + \bar{щ}_{\text{пер}} \times \bar{\Re}$$

- скорость точки в переносном движении, $\bar{v}_{\text{отн}} -$ скорость точки в относительном движении, $\bar{v}_A -$ скорость точки A, $\bar{щ}_{\text{пер}} -$ угловая скорость подвижной системы отсчета.

Ускорение точки b вычисляется по формуле

$$\bar{w}_{\text{абс}} = \bar{w}_{\text{пер}} + \bar{w}_{\text{отн}} + \bar{w}_{\text{кор}}.$$

Здесь $\overline{w}_{\text{пер}}$ − ускорение точки b в переносном движении, $\overline{w}_{\text{отн}}$ − ускорение точки в относительном движении,

$$\overline{w}_{\text{кор}} = 2\overline{\text{щ}}_{\text{пер}} \times \overline{v}_{\text{отн}}$$

- ускорение Кориолиса.

2. Сложное движение твердого тела

Вводится неподвижная система отсчета $oxyz$ и подвижная система Aозж (рис. 17). Тело участвует в двух движениях – вместе с подвижной системой отсчета и относительно подвижной системы отсчета.

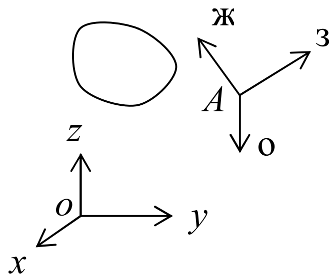

Рис.17

Суммой двух поступательных движений является поступательное движение.

Суммой двух вращений с угловыми скоростями $\overline{\text{щ}}_1$ и $\overline{\text{щ}}_2$ вокруг параллельных осей является вращение с угловой скоростью $\overline{\text{Щ}} = \overline{\text{щ}}_1 + \overline{\text{щ}}_2$ вокруг оси, проходящей через мгновенный центр скоростей, (рис.18). В случае $\overline{\omega}_1 = -\overline{\omega}_2$ суммой двух вращений является поступательное движение.

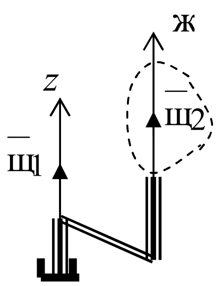

Рис.18

ДИНАМИКА

6. ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Материальной точкой называется тело конечной массы, размерами которого можно пренебречь. Далее m – масса материальной точки.

1. Основные законы динамики материальной точки

I. Принцип освобождения от связей. **Связью** называется все то, что ограничивает свободное перемещение материальной точки. **Реакцией связи** называется сила, которой связь действует на материальную точку. Реакция связи направлена в сторону, противоположную той, куда связь не дает двигаться материальной точке.

Принцип освобождения от связей: “Состояние движения (покоя) материальной точки не изменится, если действие связей заменить их реакциями”.

II. Принцип независимости действия сил. **Равнодействующей** системы сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_k, ..., \overline{F}_n$, действующих на материальную точку, называется сила

$$\overline{F} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k .$$

Принцип независимости действия сил: "Состояние движения (покоя) материальной точки не изменится, если систему сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_k, ..., \overline{F}_n$ заменить их равнодействующей $\overline{F}$". Справедлива и обратная замена.

III. **Принцип равенства действия и противодействия**: "Две материальные точки действуют друг на друга силами $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$, равными по величине и противоположно направленными, т.е. $\overline{F}_1 = -\overline{F}_2$ ".

IV. **Второй закон Ньютона**: "Сила, действующая на материальную точку, вызывает ее ускорение, пропорциональное вектору силы".

$$m\overline{w} = \overline{F}.$$

2. Основное уравнение динамики материальной точки имеет вид

$$m\overline{w} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k .$$

Здесь $\overline{w}$ – ускорение материальной точки, $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_k, ..., \overline{F}_n$ – система сил, действующих на точку.

3. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в векторной форме и в проекциях на оси координат имеют вид

$$m\frac{d^2\overline{r}}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k ,$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} .$$

Здесь $\overline{r}, x(t), y(t), z(t)$ – радиус-вектор и координаты точки, $\overline{F}_k, F_{kx}, F_{ky}$, F_{kz} – произвольная сила, действующая на материальную точку, и ее проекции на оси координат.

4. Принцип Даламбера

Силой инерции материальной точки называется вектор

$$\overline{\Phi} = -m\overline{w}.$$

Активными силами называются силы, вызывающие движение материальной точки. **Пассивные силы** – это реакции связей. **Принцип Даламбера**: "Активные силы и реакции связей всегда можно уравновесить силой инерции материальной точки", т.е.

$$\overline{F}^{\text{a}} + \overline{R} + \overline{\Phi} = \overline{0}.$$

Здесь $\overline{F}^{\text{a}}, \overline{R}$ – сумма активных сил и сумма реакций связей, приложенных к точке.

5. Две основные задачи динамики материальной точки

Первая (прямая) задача динамики. Известен закон движения точки $x(t), y(t), z(t)$. Определить равнодействующую всех сил, действующих на точку. Решается дифференцированием координат при использовании дифференциальных уравнений движения.

Вторая (обратная) задача динамики. Известны силы, действующие на материальную точку. Определить закон движения точки. Решается интегрированием дифференциальных уравнений движения.

6. Механическая система

Механической системой называется совокупность материальных точек, движения которых взаимосвязаны.

$b_1, b_2, ..., b_k, ..., b_N$ – материальные точки, входящие в механическую систему;

$b_k \ (k = 1,2,..., N)$ – произвольная точка системы;

N – число точек в системе, которое может быть и бесконечным;

$m_1, m_2, ..., m_k, ..., m_N$ – массы точек в системе;

$\mathrm{M} = \sum\limits_{k=1}^{N} m_k$ – масса всей системы;

$\vec{r}_k, x_k, y_k, z_k$ – радиус-вектор и координаты точки b_k;

$\vec{v}_k, \vec{w}_k$ – скорость и ускорение точки b_k.

7. Внешние и внутренние силы в механической системе

Внешними называются силы, возникающие в результате взаимодействия точек системы с телами, не входящими в систему. Сумма всех внешних сил, действующих на точку b_k, обозначается $\overline{F}_k^e$.

Главным вектором внешних сил называется сумма всех внешних сил, действующих на точки механической системы

$$\overline{F}^e = \sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k^e.$$

Внутренними называются силы, возникающие в результате взаимодействия точек системы между собой. Сумма всех внутренних сил, действующих на точку b_k, обозначается $\overline{F}_k^i$.

Первое свойство внутренних сил в механической системе: “Сумма всех внутренних сил в механической системе равна нулю”, т.е.

$$\sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k^i = \overline{0}.$$

8. **Дифференциальные уравнения движения механической системы** в векторной форме и в проекциях на оси координат имеют вид

$$m_k \frac{d^2 \overline{r}_k}{dt^2} = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i \quad (k = 1,2,..., N),$$

$$m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} = F_{kx}^e + F_{kx}^i, \quad m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} = F_{ky}^e + F_{ky}^i, \quad m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} = F_{kz}^e + F_{kz}^i.$$

7. ВЕКТОРНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

1. Теорема о движении центра масс механической системы

Центром масс механической системы называется точка C, положение которой определено соотношениями:

$$\overline{r}_C = \frac{1}{\mathrm{M}} \sum_{k=1}^{N} m_k \overline{r}_k,$$

$$x_C = \frac{1}{\mathrm{M}} \sum_{k=1}^{N} m_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{\mathrm{M}} \sum_{k=1}^{N} m_k y_k, \quad z_C = \frac{1}{\mathrm{M}} \sum_{k=1}^{N} m_k z_k.$$

Здесь $\overline{r}_C, x_C, y_C, z_C$ – радиус-вектор и координаты центра масс.

Теорема: “Центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы, к которой приложены все внешние силы, действующие на систему”, т.е.

$$\mathrm{M}\overline{w}_C = \overline{F}^e.$$

Следствия из теоремы:

I. Внутренние силы не влияют на движение центра масс.

II. Если $\overline{F}^e = \overline{0}$, то $\overline{v}_C = \overline{\mathrm{const}}$.

III. Если $F_x^e = 0$, то $v_{cx} = \mathrm{const}$.

2. Импульс силы

Элементарным импульсом силы $\overline{F}$ называется вектор

$$d\overline{B} = \overline{F}dt.$$

Здесь dt – бесконечно малый промежуток времени.

Импульсом силы $\overline{F}$ за конечный промежуток времени $[0, T]$ называется вектор

$$\overline{B} = \int_0^T \overline{F}dt.$$

Импульс постоянной силы равен произведению силы и времени, т.е.

$$\overline{B} = \overline{F}T.$$

3. Теорема об изменении количества движения

Количеством движения материальной точки называется вектор

$$\overline{q} = m\overline{v}.$$

Количеством движения механической системы называется сумма количеств движения всех ее точек, т.е.

$$\overline{Q} = \sum_{k=1}^{N} m_k \overline{v}_k .$$

Имеется следующее выражение вектора количества движения механической системы:

$$\overline{Q} = \mathrm{M}\overline{v}_c .$$

Теорема об изменении количества движения материальной точки в дифференциальной форме: "Дифференциал количества движения материальной точки равен элементарному импульсу равнодействующей всех сил, действующих на точку", т.е.

$$d\overline{q} = \overline{F}dt .$$

Теорема об изменении количества движения материальной точки в интегральной форме: "Изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов всех сил, действующих на точку за этот промежуток времени", т.е.

$$m\overline{v}_1 - m\overline{v}_0 = \sum_{k=1}^{n} \overline{B}_k , \quad \overline{B}_k = \int_0^T \overline{F}_k dt.$$

Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме: "Производная по времени от количества движения механической системы равна главному вектору внешних сил, действующих на систему", т.е.

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \overline{F}^e .$$

Теорема об изменении количества движения механической системы в интегральной форме: "Изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов всех внешних сил, действующих на систему за этот промежуток времени", т.е.

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum_{k=1}^{N} \overline{B}_k^e , \quad \overline{B}_k^e = \int_0^T \overline{F}_k^e dt.$$

В проекциях на оси координат теорему можно записать следующим образом:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum_{k=1}^{N} B_{kx}^{e},\ Q_{1y} - Q_{0y} = \sum_{k=1}^{N} B_{ky}^{e},\ Q_{1z} - Q_{0z} = \sum_{k=1}^{N} B_{kz}^{e}.$$

Следствия из теоремы:

I. Внутренние силы не влияют на количество движения механической системы.

II. Если главный вектор внешних сил $\overline{F}^{e}$ равен нулю, то количество движения механической системы постоянно.

III. Если проекция главного вектора внешних сил на ось ox равна нулю, то проекция вектора количества движения механической системы на эту ось постоянна, т.е. $Q_{1x} = Q_{0x}$.

4. Моменты вектора

Моментом вектора $\overline{Ю}$ относительно точки (центра) "о" называется вектор $\overline{M}_{o}(\overline{Ю})$, определенный формулой

$$\overline{M}_{o}(\overline{Ю}) = \overline{r} \times \overline{Ю}.$$

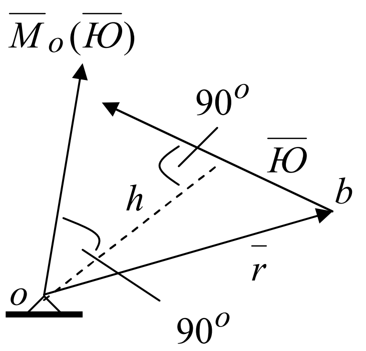

Рис.19

Здесь $\overline{r}$ – радиус-вектор точки b, с которой связан вектор $\overline{Ю}$ (рис.19).

Плечом вектора $\overline{Ю}$ относительно точки "о" называется длина перпендикуляра h, опущенного из точки "о" на линию действия вектора $\overline{Ю}$. Модуль момента определяется соотношением

$$M_{o} = Юh.$$

Моментами вектора $\overline{Ю}$ относительно координатных осей ox, oy, oz называются проекции вектора $\overline{M}_{o}(\overline{Ю})$ на эти оси:

$$M_{x}(\overline{Ю}) = \text{пр}_{x}\overline{M}_{o} = yЮ_{z} - zЮ_{y},$$

$$M_{y}(\overline{Ю}) = \text{пр}_{y}\overline{M}_{o} = zЮ_{x} - xЮ_{z},$$

$$M_{z}(\overline{Ю}) = \text{пр}_{z}\overline{M}_{o} = xЮ_{y} - yЮ_{x}.$$

Момент вектора относительно координатной оси равен нулю, если вектор параллелен оси, или если линия его действия пересекает ось.

Моментом вектора $\overline{Ю}$ относительно точки "*о*" в скалярном смысле (рис. 20) называется скалярная величина, обозначаемая $M_{o}(\overline{Ю})$ и определенная формулой [1]

$$M_{o}(\overline{Ю}) = \pm Юh.$$

---

[1] Отметим, что обозначение M_{o} здесь не надчеркнуто сверху – скалярная величина.

Знак “+” следует ставить, если вектор $\overline{Ю}$ вращает свое плечо h вокруг точки “o” против хода часовой стрелки.

Моменты вектора относительно точки равны нулю, если линия действия вектора проходит через эту точку.

Момент вектора $\overline{Ю}$ относительно оси oz можно вычислить по формуле

$$M_z(\overline{Ю}) = M_o(\overline{Ю}_{xy}).$$

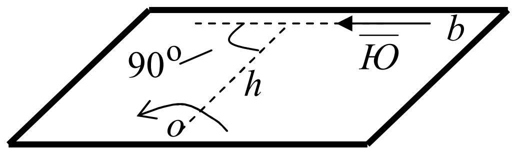

Рис. 20

Здесь $\overline{Ю}_{xy}$ – проекция вектора $\overline{Ю}$ на плоскость oxy, $M_o(\overline{Ю}_{xy})$ – момент этой проекции относительно точки “o”.

Теорема о моменте суммы: “Если с точкой b связано несколько векторов $\overline{Ю}_1,...,\overline{Ю}_n$, и вектор $\overline{Ю}$ есть сумма этих векторов, то момент вектора $\overline{Ю}$ равен сумме моментов векторов $\overline{Ю}_1,...,\overline{Ю}_n$”. Теорема справедлива для любого определения момента.

5. Теорема об изменении кинетического момента

Моменты силы $\overline{F}$ и количества движения материальной точки $\overline{q}$ относительно центра “o” определяются в векторной и скалярной формах. В векторной форме имеем

$$\overline{M}_o(\overline{F}) = \overline{M}_o = \overline{r} \times \overline{F},\ \overline{M}_o(\overline{q}) = \overline{l_o} = \overline{r} \times m\overline{v}.$$

Здесь $\overline{r}$ – радиус-вектор материальной точки. В скалярной форме моменты определяются следующим образом:

$$M_o = \pm F h_1,\ l_o = \pm m v h_2.$$

Здесь h_1, h_2 – плечи векторов $\overline{F}$ и $\overline{q}$.

Моменты векторов силы и количества движения точки относительно координатных осей вычисляются по формулам

$$M_x = yF_z - zF_y,\ M_y = zF_x - xF_z,\ M_z = xF_y - yF_x.$$

$$l_x = m(yv_z - zv_y),\ l_y = m(zv_x - xv_z),\ l_z = m(xv_y - yv_z).$$

Здесь x, y, z – координаты материальной точки.

Теорема об изменении момента количества движения материальной точки: “Производная по времени от момента количества движения материальной точки равна моменту равнодействующей $\overline{F}$ всех сил, действующих на точку”, т.е.

$$\frac{d\overline{l_o}}{dt} = \overline{M}_o(\overline{F}),$$

$$\frac{dl_x}{dt} = M_x(\overline{F}),\ \frac{dl_y}{dt} = M_y(\overline{F}),\ \frac{dl_z}{dt} = M_z(\overline{F}).$$

Кинетическим моментом механической системы относительно центра "*o*" называется сумма моментов количества движения всех точек системы:

$$\overline{L}_o = \sum_{k=1}^{N} m_k (\overline{r}_k \times \overline{v}_k).$$

Кинетическими моментами механической системы относительно координатных осей называются проекции вектора $\overline{L}_o$ на эти оси:

$$L_x = \sum_{k=1}^{N} m_k (y_k v_{kz} - z_k v_{ky}),$$

$$L_y = \sum_{k=1}^{N} m_k (z_k v_{kx} - x_k v_{kz}),$$

$$L_z = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k v_{ky} - y_k v_{kx})$$

(см. обозначения в п. 6.**6**).

Главным моментом внешних сил относительно центра "*o*" называется сумма моментов всех внешних сил, действующих на механическую систему, т.е.

$$\overline{M}_o^e = \sum_{k=1}^{N} \overline{M}_o (\overline{F}_k^e).$$

Главными моментами внешних сил относительно координатных осей называются проекции вектора $\overline{M}_o^e$ на эти оси, т.е.

$$M_x^e = \sum_{k=1}^{N} M_x (\overline{F}_k^e), \quad M_y^e = \sum_{k=1}^{N} M_y (\overline{F}_k^e), \quad M_z^e = \sum_{k=1}^{N} M_z (\overline{F}_k^e).$$

Второе свойство внутренних сил в механической системе: "Сумма моментов всех внутренних сил в механической системе равна нулю", т.е.

$$\sum_{k=1}^{N} \overline{M}_o (\overline{F}_k^i) = \overline{0}.$$

Теорема об изменении кинетического момента механической системы: "Производная по времени от кинетического момента механической системы равна главному моменту внешних сил, действующих на систему", т.е.

$$\frac{d\overline{L}_o}{dt} = \overline{M}_o^e,$$

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^e, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y^e, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^e.$$

Следствия из теоремы:

I. Внутренние силы не влияют на кинетический момент механической системы.

II. Если главный момент внешних сил равен нулю, то кинетический момент механической системы постоянен. Это следствие справедливо в векторной форме и в проекциях на оси координат.

8. ДИНАМИКА И СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Тело считается абсолютно твердым, деформациями тела пренебрегаем. Вводится подвижная система координат о, з, ж, жестко связанная с телом. Ее начало отсчета либо в центре тяжести C, либо в произвольной точке A тела (рис. 21).

1. Моменты инерции и центробежные моменты твердого тела

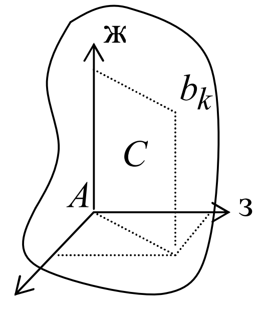

Рис. 21

Моменты инерции относительно координатных осей $A\xi, A\eta, A\zeta$ определяются формулами

$$J_{\text{о}} = \sum_{k=1}^{N} m_k (\text{з}_k^2 + \text{ж}_k^2), \quad J_{\text{з}} = \sum_{k=1}^{N} m_k (\text{о}_k^2 + \text{ж}_k^2),$$

$$J_{\text{ж}} = \sum_{k=1}^{N} m_k (\text{о}_k^2 + \text{з}_k^2).$$

Центробежные моменты тела определяются формулами

$$J_{\text{оз}} = \sum_{k=1}^{N} m_k \text{о}_k \text{з}_k, \quad J_{\text{зж}} = \sum_{k=1}^{N} m_k \text{з}_k \text{ж}_k, \quad J_{\text{ож}} = \sum_{k=1}^{N} m_k \text{о}_k \text{ж}_k .$$

Здесь $\text{о}_k, \text{з}_k, \text{ж}_k$ – координаты произвольной точки тела b_k. В случае, когда оси координат проходят через центр масс тела, моменты инерции и центробежные моменты обозначаются $J_{c\text{о}}, ..., J_{c\text{зж}}$.

2. Кинетический момент твердого тела

Кинетический момент твердого тела относительно центра “*o*” определяется формулой

$$\overline{L}_o = \overline{r}_c \times \overline{Q} + \overline{L}_c .$$

Здесь $\overline{r}_c$ – радиус-вектор центра масс, $\overline{Q}$ – вектор количества движения тела, $\overline{L}_c$ – кинетический момент, который тело приобретает за счет вращения вокруг центра масс.

Вектор $\overline{L}_c$ определяется по проекциям на оси подвижной системы координат о, з, ж следующим образом:

$$L_{cо} = J_{cо}щ_{о} - J_{cоз}щ_{з} - J_{cож}щ_{ж},$$
$$L_{cз} = -J_{cоз}щ_{о} + J_{cз}щ_{з} - J_{cзж}щ_{ж},$$
$$L_{cж} = -J_{cож}щ_{о} - J_{cзж}щ_{з} + J_{cж}щ_{ж}$$

Здесь $щ_{о}, щ_{з}, щ_{ж} -$ проекции вектора угловой скорости тела $\overline{щ}$ на подвижные оси.

3. Дифференциальные уравнения движения твердого тела

Общий случай движения определяется уравнениями

$$М\frac{d^2\overline{r}_c}{dt^2} = \overline{F}^e, \ М\overline{r}_c \times \frac{d^2\overline{r}_c}{dt^2} + \frac{d\overline{L}_c}{dt} = \overline{M}^e_o \, (\text{или } \frac{d\overline{L}_c}{dt} = \sum_{k=1}^{N}\overline{M}_c(\overline{F}^e_k)).$$

Движение твердого тела вокруг неподвижной точки определяется уравнениями

$$\frac{dL_{о}}{dt} + щ_{з}L_{ж} - щ_{ж}L_{з} = M^e_{о},$$
$$\frac{dL_{з}}{dt} + щ_{ж}L_{о} - щ_{о}L_{ж} = M^e_{\eta},$$
$$\frac{dL_{ж}}{dt} + щ_{о}L_{з} - щ_{з}L_{о} = M^e_{ж}.$$

Здесь $M^e_{о}, M^e_{з}, M^e_{ж} -$ главные моменты внешних сил относительно координатных осей подвижной системы координат с центром в неподвижной точке.

Вращение вокруг неподвижной оси определяется уравнением

$$J_{ж}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N} M_z(\overline{F}^e_k).$$

Здесь оси oz и $oж$ проходят вдоль оси вращения, $\varphi -$ угол поворота тела.

Плоское движение твердого тела определяется уравнениями

$$М\frac{d^2x_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N}F^e_{kx}, \ М\frac{d^2y_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N}F^e_{ky}, \ J_{cж}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N}M_c(\overline{F}_k).$$

Здесь $J_{c\zeta} -$ момент инерции тела относительно оси $C\zeta$, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения; $\varphi -$ угол поворота тела.

Поступательное движение твердого тела определяется уравнениями

$$М\frac{d^2x_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N}F^e_{kx}, \quad М\frac{d^2y_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N}F^e_{ky}, \quad М\frac{d^2z_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^{N}F^e_{kz}.$$

4. Допустимые преобразования системы внешних сил, действующих на твердое тело

Состояние движения (покоя) твердого тела определяется не отдельными силами, а главным вектором и главным моментом системы внешних сил (рис. 22):

$$\overline{F}^e = \sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k, \ \overline{M}_O^e = \sum_{k=1}^{N} \overline{M}_O(\overline{F}_k).$$

Две системы внешних сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, .., \overline{F}_N$ и $\overline{G}_1, \overline{G}_2, .., \overline{G}_S$ называются **эквивалентными**, если при замене одной системы сил на другую состояние движения тела (покой) не изменится. Эквивалентные системы сил имеют одинаковые главный вектор и главный момент.

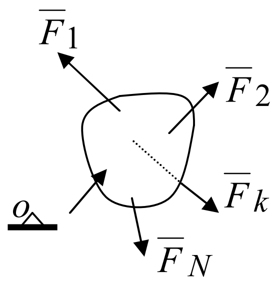

Рис. 22

Преобразования системы внешних сил, действующих на твердое тело, называются **допустимыми**, если они не меняют главного вектора и главного момента.

Примеры допустимых преобразований:

I. К телу можно присоединить (отбросить) две силы, равные по модулю и противоположно направленные вдоль одной прямой.

II. Силы, приложенные в одной точке тела, можно заменить их геометрической суммой.

III. Силу можно переносить вдоль линии действия.

IV. Систему сил тяжести $\overline{p}_1, \overline{p}_2, ..., \overline{p}_N$ точек твердого тела можно заменить одной силой $\overline{P} = \sum_{k=1}^{N} \overline{p}_k$, приложенной в центре тяжести C. Положение центра тяжести определяется формулами

$$\overline{r}_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^{N} p_k \overline{r}_k,$$

$$x_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^{N} p_k x_k, \quad y_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^{N} p_k y_k, \quad z_C = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^{N} p_k z_k.$$

Здесь $\overline{r}_C$, x_C, y_C, z_C – радиус-вектор и координаты точки С. Центр тяжести тела совпадает с центром масс тела.

V. Равномерно распределенную нагрузку интенсивности q, приложенную на прямолинейном участке тела длиной L, можно заменить равнодействующей силой $\mathsf{Q} = \mathsf{q}L$, приложенной в середине участка.

5. Пара сил

Парой сил называется система двух сил $(\overline{G}, \overline{G}')$, равных по величине и противоположно направленных, т.е. $\overline{G} = -\overline{G}'$ (рис. 23).

Моментом пары сил $(\overline{G},\overline{G}')$ называется вектор $\overline{M}(\overline{G},\overline{G}')$, равный сумме моментов сил, составляющих пару (при этом моменты могут вычисляться относительно любой точки).

Плечом пары сил называется расстояние H между линиями действия сил $\overline{G}$ и $\overline{G}'$. Модуль момента пары равен произведению модуля одной из сил и плеча пары, т.е.

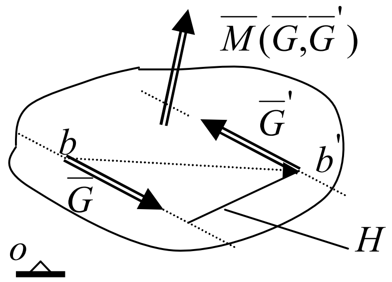

Рис. 23

$$M = GH.$$

В плоском случае **момент пары сил определяется как скалярная величина**.по формуле

$$M = \pm GH.$$

Знак “+” следует ставить, если пара сил вращает свое плечо против хода часовой стрелки.

Действие пары сил на тело полностью характеризуется моментом пары.

Допустимые преобразования пар сил:

I. Как жесткое целое пару сил $\overline{G},\overline{G}'$ можно сдвинуть произвольным образом и перенести в любое место тела при условии сохранения направления вектора $\overline{M}(\overline{G},\overline{G}')$.

II. Силы $\overline{G}$ и $\overline{G}'$ можно сдвинуть вдоль линий их действия.

III. Можно уменьшить модули сил $\overline{G},\overline{G}'$ и пропорционально увеличить плечо пары H (сохранив произведение GH).

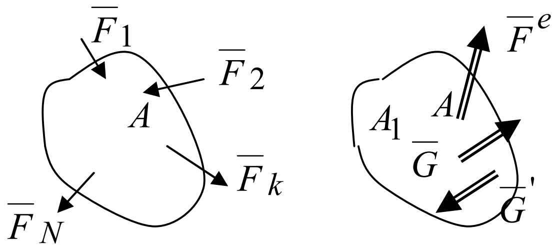

Рис. 24

IV. Если на тело действует несколько пар сил $(\overline{G}_1,\overline{G}_1'),...,(\overline{G}_s,\overline{G}_s')$ с моментами $\overline{M}_1,...,\overline{M}_s$, то их можно заменить одной парой $(\overline{G},\overline{G}')$ с моментом $\overline{M} = \overline{M}_1 + ... + \overline{M}_s$.

6. Теорема Пуансо (основная теорема статики): “Произвольную систему внешних сил $\overline{F}_1,\overline{F}_2,...,\overline{F}_N$, действующих на твердое тело, можно заменить тремя силами $\overline{F}^e,\overline{G},\overline{G}'$, первая из которых равна главному вектору и приложена в центре приведения A (рис. 24). Две другие силы образуют пару $(\overline{G},\overline{G}')$, момент которой равен главному моменту исходной системы сил относительно центра приведения, т.е.

$$\overline{M}(\overline{G},\overline{G}') = \overline{M}_A^e = \sum_{k=1}^{N} \overline{M}_A(\overline{F}_k).”$$

Центр приведения $A-$ любая точка тела. При замене центра приведения точкой A_1 главный момент системы внешних сил изменяется согласно формуле

$$\overline{M}_{A_1}^e = \overline{A_1 A} \times \overline{F}^e + \overline{M}_A^e.$$

Здесь $\overline{M}_A^e$ и $\overline{M}_{A_1}^e$ $-$ главные моменты внешних сил относительно точек A и A_1. При замене центра приведения остаются **инвариантными** (неизменными) главный вектор $\overline{F}^e$ и скалярное произведения главного вектора и главного момента, т.е. $\overline{F}^e \cdot \overline{M}_A^e$.

7. Статика твердого тела

Система сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_N$, действующих на твердое тело, называется **уравновешенной**, если ее главный вектор $\overline{F}^e$ и главный момент $\overline{M}_o^e$ равны нулю, т.е.

$$\sum_{k=1}^{N} \overline{F}_k = \overline{0}, \quad \sum_{k=1}^{N} \overline{M}_o(\overline{F}_k) = \overline{0}.$$

Эти соотношения называются **уравнениями равновесия в векторной форме**. Здесь точка "o"$-$ любая точка пространства.

Под действием уравновешенной системы внешних сил твердое тело или находится в покое, или движется по инерции.

Уравнения равновесия произвольной системы сил в скалярной форме имеют вид

$$\sum_{k=1}^{N} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{N} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{N} F_{kz} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{N} M_x(\overline{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{N} M_y(\overline{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{N} M_z(\overline{F}_k) = 0.$$

Система сил, действующих на твердое тело, называется **сходящейся**, если линии действия всех сил пересекаются в одной точке. **Уравнения равновесия сходящейся системы сил** имеют вид

$$\sum_{k=1}^{N} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{N} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{N} F_{kz} = 0.$$

Система сил, действующих на твердое тело, называется **плоской**, если все силы находятся в некоторой неподвижной плоскости oxy. **Уравнения**

равновесия плоской системы сил можно записать в трех следующих формах:

$$\sum_{k=1}^{N} F_{kx} = 0,\ \ \sum_{k=1}^{N} F_{ky} = 0,\ \ \sum_{k=1}^{N} M_o(\overline{F}_k) = 0.$$

Здесь точка “*o*” –любая точка плоскости oxy.

$$\sum_{k=1}^{N} F_{kx} = 0,\ \ \sum_{k=1}^{N} M_o(\overline{F}_k) = 0,\ \ \sum_{k=1}^{N} M_A(\overline{F}_k) = 0.$$

Здесь ось ox не должна быть перпендикулярна прямой *oA*.

$$\sum_{k=1}^{N} M_o(\overline{F}_k) = 0,\ \ \sum_{k=1}^{N} M_A(\overline{F}_k) = 0,\ \ \sum_{k=1}^{N} M_B(\overline{F}_k) = 0.$$

Здесь точки *o,A,B* не должны лежать на одной прямой.

9. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

1. Работа силы

Вектором бесконечно малого пути называется дифференциал радиус-вектора движущейся точки

$$d\overline{r} = d\overline{s}.$$

Элементарной работой силы (работой силы на бесконечно малом перемещении) называется скалярная величина $d^{'}A$, определенная формулами

$$d^{'}A = \overline{F}\cdot d\overline{r},\ \ d^{'}A = Fds\cos\alpha,\ \ d^{'}A = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

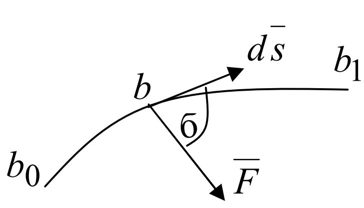

Рис. 25

Здесь б – угол между векторами $\overline{F}$ и $d\overline{s}$, dx, dy, dz – дифференциалы координат движущейся точки (рис. 25).

Работой силы $\overline{F}$ на конечном перемещении b_0b_1 называется сумма элементарных работ на всех бесконечно малых участках траектории:

$$A_{0.1} = \int_{b_0}^{b_1} \overline{F}\cdot d\overline{s} = \int_{b_0}^{b_1} F\cos б\, ds,\ \ A_{0.1} = \int_{b_0}^{b_1} \overline{F}\cdot d\overline{r} = \int_{b_0}^{b_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

Нижний индекс в обозначении работы далее писать не будем.

Теорема о работе равнодействующей силы: “Работа равнодействующей силы равна сумме работ составляющих”.

Сила называется нормальной, если она направлена перпендикулярно траектории точки. **Работа нормальной** силы равна нулю.

Работа постоянной силы $\overline{F}$ вычисляется по формуле

$$A = \overline{F} \cdot \overline{S}.$$

Здесь $\overline{S} = \overline{b_0 b_1} -$ вектор кратчайщего расстояния между точками b_0 и b_1.

Работа упругой силы пружины в случае прямолинейного движения точки вычисляется по формуле

$$A(\overline{F}_{\text{упр}}) = \frac{c}{2}(x_o^2 - x_1^2).$$

Здесь $c -$ коэффициент жесткости пружины, $x_0, x_1 -$ координаты начального и конечного положения. Начало отсчета расположено в конце ненапряженной пружины.

Работа силы тяжести материальной точки вычисляется по формуле

$$A = \pm PH.$$

Здесь $H -$ перемещение точки по высоте, $P -$ сила тяжести точки. Знак "+" следует ставить при движении вниз.

Работа силы тяжести твердого тела вычисляется по формуле

$$A = \pm PH_c.$$

Здесь $H_c -$ перемещение центра тяжести тела по высоте, $P -$ вес тела. Знак "+" следует ставить при движении центра тяжести тела вниз.

Работа вращающего момента, приложенного к телу при вращении вокруг неподвижной оси, вычисляется по формуле

$$A(\mathrm{m}_z) = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \mathrm{m}_z d\varphi.$$

Здесь $\varphi_0, \varphi_1 -$ начальное и конечное значение угла поворота тела.

Сумма работ всех внутренних сил в твердом теле равна нулю, т.е.

$$\sum_{k=1}^{N} A(\overline{F}_k^e) = 0.$$

2. Силовое поле

Силовым полем называется пространство, в котором сила рассматривается как функция координат, т.е. $\overline{F} = \overline{F}(x, y, z)$.

Силовой функцией называется скалярная величина U, определенная соотношениями

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x},\ F_y = \frac{\partial U}{\partial y},\ F_z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Силовая функция существует, если выполняются соотношения

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0.$$

Потенциальной энергией называется скалярная величина Π, равная силовой функции, взятой с обратным знаком, т.е.

$$\Pi = -U.$$

Если функции Π и U существуют, то силовое поле называется **потенциальным.** В потенциальных силовых полях работа силы не зависит от формы траектории точки.

3. Кинетическая энергия

Кинетическая энергия материальной точки определяется формулой

$$T = \frac{1}{2} m v^2 .$$

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий всех ее точек, т.е.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k v_k^2 .$$

Кинетическая энергия твердого тела **при поступательном движении:**

$$T = \frac{1}{2} \mathrm{M} v_c^2 .$$

Кинетическая энергия твердого тела **при вращении вокруг неподвижной оси:**

$$T = \frac{1}{2} J_z \text{щ}^2 .$$

Здесь J_z − момент инерции тела относительно оси вращения.

Кинетическая энергия твердого тела **при плоском и свободном движении:**

$$T = \frac{1}{2} \mathrm{M} v_c^2 + \frac{1}{2} J_{c\text{ж}} \text{щ}^2 , \quad T = \frac{1}{2} \mathrm{M} v_c^2 + \frac{1}{2} J_{CK} \text{щ}^2 .$$

Здесь $J_{c\text{ж}}$ − момент инерции тела относительно оси Cж, проходящей через центр тяжести перпендикулярно плоскости движения; J_{CK} − момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения.

Кинетическая энергия **системы твердых тел** равна сумме кинетических энергий отдельных тел.

4. Теорема об изменении кинетической энергии

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки: "Изменение кинетической энергии материальной точки при некотором ее перемещении равно сумме работ всех сил, действующих на точку (на этом перемещении)", т.е.

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \sum_{k=1}^{n} A(\overline{F}_k).$$

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы: “Изменение кинетической энергии произвольной механической системы при некотором ее перемещении равно сумме работ всех внешних и внутренних сил в системе (на соответствующих перемещениях отдельных точек системы)”, т.е.

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{N} A(\overline{F}_k^e) + \sum_{k=1}^{N} A(\overline{F}_k^i).$$

Теорема об изменении кинетической энергии твердого тела: “Изменение кинетической энергии твердого тела при некотором его перемещении равно сумме работ всех внешних сил “, т.е.

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{N} A(\overline{F}_k^e).$$

Библиографический список

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. М.: Наука, 1979. Т.1, 2.
2. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. М.: Наука, 1967. Ч.1, 2.
3. Гернет М.М. Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1981.
4. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. М.: Наука, 1977. Т.1, 2.
5. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. М.: Наука, 1983. Т.1, 2.
6. Рябенков Н.Г. Основы теоретической механики. Казань: КГЭУ, 2004.
7. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Наука, 1967.
8. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1977. Ч.1, 2.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

КИНЕМАТИКА

ДИНАМИКА